

**ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010**  
**Môn thi : TOÁN**

**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)**

**Câu I (2,0 điểm).** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$  (1),  $m$  là số thực

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi  $m = 1$ .
2. Tìm  $m$  để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  thỏa mãn điều kiện :  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$

**Câu II (2,0 điểm)**

1. Giải phương trình 
$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

2.. Giải bất phương trình : 
$$\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1$$

**Câu III (1,0 điểm).** Tính tích phân :  $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$

**Câu IV (1,0 điểm).** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và  $SH = a\sqrt{3}$ . Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo  $a$ .

**Câu V (1,0 điểm).** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)**

*Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

**A. Theo chương trình Chuẩn**

**Câu VI.a (2,0 điểm)**

1. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$  và  $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$ . Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với  $d_1$  tại A, cắt  $d_2$  tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  và điểm A có hoành độ dương.

2. Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$  và mặt phẳng (P) :  $x - 2y + z = 0$ . Gọi C là giao điểm của  $\Delta$  với (P), M là điểm thuộc  $\Delta$ . Tính khoảng cách từ M đến (P), biết  $MC = \sqrt{6}$ .

**Câu VII.a (1,0 điểm).** Tìm phần ảo của số phức  $z$ , biết  $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i)$

**B. Theo chương trình Nâng cao**

**Câu VI.b (2,0 điểm)**

1. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6; 6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình  $x + y - 4 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm E(1; -3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

2. Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm A(0; 0; -2) và đường thẳng  $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ . Tính khoảng cách từ A đến  $\Delta$ . Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt  $\Delta$  tại hai điểm B và C sao cho  $BC = 8$ .

**Câu VII.b (1 điểm).**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1-i}$ . Tìm môđun của số phức  $\bar{z} + iz$

**BÀI GIẢI**

**Câu I:** 1)  $m=1$ , hàm số thành :  $y = x^3 - 2x^2 + 1$ .

Tập xác định là  $\mathbb{R}$ .  $y' = 3x^2 - 4x$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hay  $x = \frac{4}{3}$ ;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

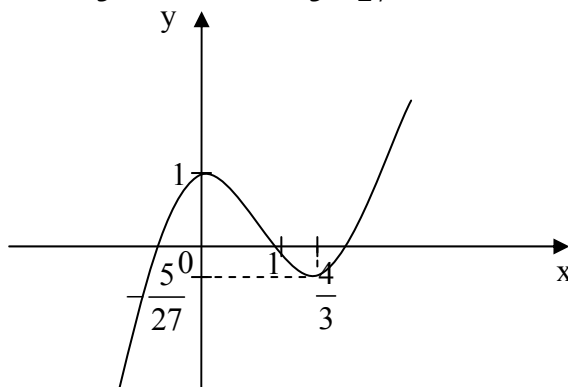
x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$		
$y'$		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		1		$-\frac{5}{27}$	$+\infty$
			CD		CT	

Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 0)$ ;  $(\frac{4}{3}; +\infty)$ ; hàm số nghịch biến trên  $(0; \frac{4}{3})$

Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ ;  $y(0) = 1$ ; hàm số đạt cực tiểu tại  $x = \frac{4}{3}$ ;  $y(\frac{4}{3}) = -\frac{5}{27}$

$y'' = 6x - 4$ ;  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ . Điểm uốn I  $(\frac{2}{3}; \frac{11}{27})$

Đồ thị :



2. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và trục hoành là :

$$x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hay } g(x) = x^2 - x - m = 0 \quad (2)$$

Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình (2). Với điều kiện  $1 + 4m > 0$  ta có :

$$x_1 + x_2 = 1; x_1 x_2 = -m. \text{ Do đó yêu cầu bài toán tương đương với:}$$

$$\begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ g(1) = -m \neq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ -m \neq 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ 1 + 2m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

**Câu II:** 1. Điều kiện :  $\cos x \neq 0$  và  $\tan x \neq -1$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \cdot (\sin x + \cos x)}{1 + \tan x} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \cdot (\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x + \cos 2x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \text{ (loại)} \text{ hay } \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Điều kiện  $x \geq 0$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{x} - 1 + \sqrt{2(x^2 - x + 1)}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 0$$

$$\bullet \text{ Mẫu số } < 0 \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - x + 1)} > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 > 0 \text{ (hiển nhiên)}$$

$$\text{Do đó bất phương trình } \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 1 + \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \leq -x + \sqrt{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \sqrt{x} + 1 \geq 0 \\ (x-1)^2 + 2\sqrt{x}(x-1) + x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \sqrt{x} + 1 \geq 0 \\ (x-1 + \sqrt{x})^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x = (1-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Cách khác :

Điều kiện  $x \geq 0$

$$\text{Nhận xét : } 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} = 1 - \sqrt{2 \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right]} \leq 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$$

$$(1) \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}$$

\*  $x = 0$  không thỏa.

$$* x > 0 : (1) \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{2 \left(x + \frac{1}{x} - 1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 \left(x + \frac{1}{x} - 1\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + 1$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{x} + x = t^2 + 2$$

$$(1) \text{ thành : } \sqrt{2(t^2 + 1)} \leq t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ 2t^2 + 2 \leq t^2 + 2t + 1 \end{cases} (*)$$

$$(*) t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

**Câu III.**

$$I = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x) + e^x}{1+2e^x} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x} dx; I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+2e^x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+2e^x)}{1+2e^x} = \frac{1}{2} \ln(1+2e^x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$$

**Câu IV:**

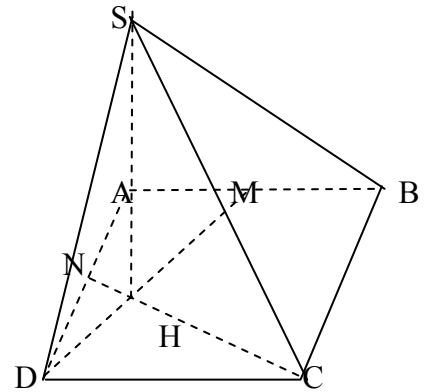
$$S_{(NDCM)} = a^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{a}{2} a = \frac{5a^2}{8} \text{ (đvdt)} \Rightarrow V_{(S.NDCM)} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24} \text{ (đvtt)}$$

$$NC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

Ta có 2 tam giác vuông AMD và NDC bằng nhau

Nên  $\widehat{NCD} = \widehat{ADM}$  vậy DM vuông NC

$$\text{Vậy Ta có: } DC^2 = HC \cdot NC \Rightarrow HC = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$



Ta có tam giác SHC vuông tại H, và khoảng cách của DM và SC chính là chiều cao h vẽ từ H trong tam giác SHC

$$\text{Nên } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

**Câu V :** ĐK :  $x \leq \frac{3}{4}$ . Đặt  $u = 2x$ ;  $v = \sqrt{5-2y}$

$$\text{Pt (1) trở thành } u(u^2 + 1) = v(v^2 + 1) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

$$\text{Nghĩa là : } 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ y = \frac{5-4x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Pt (2) trở thành } \frac{25}{4} - 6x^2 + 4x^4 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \text{ (*)}$$

Xét hàm số  $f(x) = 4x^4 - 6x^2 + \frac{25}{4} + 2\sqrt{3-4x}$  trên  $\left[0; \frac{3}{4}\right]$

$$f'(x) = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3x-4}} < 0$$

Mặt khác :  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7$  nên (\*) có nghiệm duy nhất  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = 2$ .

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = 2$

### A. Theo chương trình Chuẩn

#### Câu VI.a:

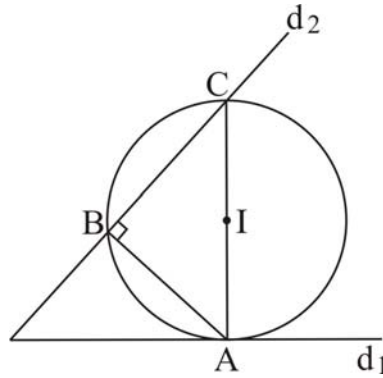
1.  $A \in d_1 \Rightarrow A(a; -a\sqrt{3}) \quad (a > 0)$

Pt AC qua A  $\perp d_1 : x - \sqrt{3}y - 4a = 0$

$AC \cap d_2 = C(-2a; -2\sqrt{3}a)$

Pt AB qua A  $\perp d_2 : x + \sqrt{3}y + 2a = 0$

$AB \cap d_2 = B\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$



$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BA \cdot BC = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right); C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -2\right)$$

$$\Rightarrow \text{Tâm } I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}; -\frac{3}{2}\right); R = IA = 1 \Rightarrow \text{Pt}(T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

2.  $C(1 + 2t; t; -2 - t) \in \Delta$

$C \in (P) \Rightarrow (1 + 2t) - 2t - 2 - t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow C(-1; -1; -1)$

$M(1 + 2t; t; -2 - t)$

$MC^2 = 6 \Leftrightarrow (2t + 2)^2 + (t + 1)^2 + (-t - 1)^2 = 6 \Leftrightarrow 6(t + 1)^2 = 6 \Leftrightarrow t + 1 = \pm 1$

$\Leftrightarrow t = 0$  hay  $t = -2$

Vậy  $M_1(1; 0; -2); M_2(-3; -2; 0)$

$d(M_1, (P)) = \frac{|1 - 0 - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}; d(M_2, (P)) = \frac{|-3 + 4 + 0|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

**Câu VII.a:**  $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i) = (1 + 2\sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = (5 + \sqrt{2}i)$

$\Leftrightarrow z = 5 - \sqrt{2}i \Rightarrow$  Phần ảo của số phức  $z$  là  $-\sqrt{2}$

### B. Theo chương trình Nâng cao

#### Câu VI.b :

1. Phương trình đường cao AH :  $1(x - 6) - 1(y - 6) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

Gọi K là giao điểm của IJ và AH (với IJ :  $x + y - 4 = 0$ ), suy ra K là nghiệm

của hệ  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow K(2; 2)$

K là trung điểm của AH  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2x_K - x_A = 4 - 6 = -2 \\ y_H = 2y_K - y_A = 4 - 6 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow H(-2; -2)$

Phương trình BC :  $1(x + 2) + 1(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 4 = 0$

Gọi B(b; -b - 4)  $\in$  BC

Do H là trung điểm của BC  $\Rightarrow C(-4 - b; b); E(1; -3)$

Ta có :  $\vec{CE} = (5 + b; -b - 3)$  vuông góc với  $\vec{BA} = (6 - b; b + 10)$

$\Rightarrow (5 + b)(6 - b) + (-b - 3)(b + 10) = 0$

$\Rightarrow 2b^2 + 12b = 0 \Rightarrow b = 0$  hay  $b = -6$

Vậy  $B_1(0; -4); C_1(-4; 0)$  hay  $B_2(-6; 2); C_2(2; -6)$

2.  $\Delta$  qua M(-2; 2; -3), VTCP  $\vec{a} = (2; 3; 2); \vec{AM} = (-2; 2; -1)$

$$\Rightarrow \vec{a} \wedge \overrightarrow{AM} = (-7; -2; 10) \Rightarrow d(A, \Delta) = \frac{|\vec{a} \wedge \overrightarrow{AM}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{49+4+100}}{\sqrt{4+9+4}} = \sqrt{\frac{153}{17}} = 3$$

Vẽ BH vuông góc với  $\Delta$

$$\text{Ta có : } BH = \frac{BC}{2} = 4. \quad \Delta AHB \Rightarrow R^2 = 16 + \frac{153}{17} = \frac{425}{17} = 25$$

$$\text{Phương trình (S) : } x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$$

$$\text{Câu VII.b: } \quad \bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i} \quad (1-\sqrt{3}i) = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$\Rightarrow (1-\sqrt{3}i)^3 = 8(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -8 \Rightarrow \bar{z} = \frac{-8}{1-i} = \frac{-8(1+i)}{2} = -4-4i$$

$$\Rightarrow \bar{z} + iz = -4-4i + i(-4+4i) = -8(1+i) \Rightarrow |\bar{z} + iz| = 8\sqrt{2}$$

Hà Văn Chương, Trần Minh Quang  
(Trường THPT Phú Nhuận – TP.HCM)